Lycée Pilote Monastir	Devoir de Synthèse n°:2 — 3 Math
	MATHEMATIQUES
Profs :Mr Zemni – Mr Krir	Durée : 3 h — Le 6/3/2019

Exercice 1: (5 points)

Soit le nombre complexe a = $\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$

0,25 1) a) Ecrire a sous forme algébrique.

0,5 b) Montrer que $a^2 = \bar{a}$ et que $1 + a + a^2 = 0$.

0,5 c) Ecrire a sous forme trigonométrique.

0,25 2) a) vérifier que $z^2 - 2\sqrt{2}\,z = (z - \sqrt{2})^2 - 2$

0,5 b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

3) Soit $b = 1 - i$

0,25 a) Ecrire b sous forme trigonométrique.

0,5 b) En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $c = \frac{\bar{a}}{b^3}$

0,75 c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.Soient les points A, B et M d'affixes respectives a, b et z, (z ∈Ê)

0,5 a) Placer les points A et B dans $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1 b) Déterminer et construire chacun des ensembles suivants : $E = \{M \in P,\ |iz - i - 1| = |a - b|\}$,

$F = \{M \in P,\ |\bar{z} - i - 1| = \left|z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right|\}$.

Exercice 2: (5,5 points)

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,25 1) a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

0,5 Dresser alors le tableau de variation de f.

b) Soient α et β deux réels de $]\frac{\pi}{2},\pi[$ avec $\alpha < \beta$.

0,5 Comparer $f(\cos\alpha)$ et $f(\cos\beta)$.

0,5 2) a) Montrer que I(0,2) est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

0,25 b) Ecrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

0,5 c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

3) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

0,75 4) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de

0,5 l'équation (E_m) : $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta} = m$.

II) Soit g la fonction définie sur par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2-2x+4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) Etudier la dérivabilité de g en 0.

0,5 b) Montrer que la droite D : y = x – 1 est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_g)$ au voisinage de (+õ).

0,5 2) Dresser le tableau de variation de g

0,5 3) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.(On tracera les demi-tangentes à $(\mathcal{C}_g)$ au point I.

0,75

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur Ë par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(1-\cos(x))}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{3x}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 A) 1) a) Montrer que f est continue en 0..

0,75 b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 3) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite Δ : y = x sur $[0, +\infty[$.

B) Soit (u_n) la suite definie par $u_o = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

0,5 1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

0,5 b) Montrer que (u_n) est croissante.

0,5 2) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $1 - u_{n+1} \leq \dfrac{6}{7}(1-u_n)$.

0,5 b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $1 - u_n \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

Calculer alors la limite de (u_n).

0,25 3) Soit (S_n) la suite définie sur É* par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$.

0,25 a) Montrer que (S_n) est croissante .

0,5 b) On admet que (S_n) est convergente , donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4 : (4,5 points)

Le plan étant orienté dans le sens direct. ABC est un triangle isocèle ,rectangle en A et de sens direct . Soit D un point du segment [BC] tel que BD = AB.

0,5 1)a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en B et B en D.

0,5 b) Déterminer une mesure de son angle et construire son centre I .

2) Soit f = RoR

0,25 a) Donner les éléments caractéristiques de f.

0,5 b) Déterminer f(A) et déduire la nature du triangle AID.

3) Soit D' = R(D)

0,5 a) Déterminer f(B). Construire alors le point D'.

0,25 b) Déterminer l'image de la droite (AB) par f

0,25 c) Prouver que ACDD' est un parallélogramme.

0,5 4) a) Montrer que les points A ,B , D et D' sont situés sur un même cercle ζ à déterminer.

0,25 b) Vérifier que le cercle ζ est globalement invariant par f .

5) Soient Γ_A et Γ_B les cercles de centres respectifs A et B et passant par le point I; les cercles Γ_A et Γ_B se recoupent en un point J. Soit $M \in \Gamma_A \setminus \{I, J\}$ et soit M' = R(M)

0,5 a) Montrer que les points M , J et M' sont alignés.

0,5 b) Soit J' = R(J). Montrer que la droite (JJ') est tangente au cercle Γ_A.